

Modelo de autodepuração das águas em reservatórios

Walter Del Picchia¹

RESUMO É proposto um modelo simplificado para a determinação de DBO, de oxigênio, de coliformes e de sólidos em suspensão em reservatórios com mistura completa e volume variável. Para reservatórios com volume sensivelmente constante, uma aproximação razoável é empregar as equações desenvolvidas para lagos. Se o volume varia de modo apreciável, porém, esse procedimento poderá ocasionar erros bastante grosseiros, impondo-se então uma formulação mais precisa. Alguns exemplos são utilizados para corroborar as afirmações feitas.

Palavras-chave: autodepuração das águas, reservatórios, volume variável, lagos, modelos.

ABSTRACT It is proposed a simplified model to determine the concentrations of BOD, oxygen, coliforms and solids in suspension in reservoirs with complete moisture and variable volume. For reservoirs with sensibly constant volumes a reasonable approximation is to use the equations developed for lakes; but if the volume varies in a wide range, this procedure can offer quite gross margins of errors, therefore requiring a more highly precise formulation. Some examples are used to corroborate these assertives.

Key words: water self-purification, reservoirs, variable volume, lakes, models.

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um modelo analítico simplificado de autodepuração das águas em reservatórios com mistura completa e volume variável. Os resultados obtidos com a aplicação do modelo são comparados com aqueles que seriam alcançados caso fossem utilizadas as equações que descrevem a autodepuração em lagos (volume constante) [1]. O estudo visa também complementar os trabalhos [2] e [3] do mesmo autor.

A solução apresentada é original, pois os reservatórios foram operados com volume variável; embora no volume tenha sido admitida variação linear, a adoção do volume variável acarretou sensível complicação na resolução das equações.

Para reservatórios que apresentam volume sensivelmente constante, podem-se utilizar as mesmas equações empregadas para lagos, com pequenas adaptações, como uma boa aproximação. Porém, para volume variável, esse procedimento pode acarretar erros por demais grosseiros, crescentes com o tempo; nesse caso, impõe-se uma formulação mais precisa que a citada. Os exemplos apresentados ilustram as diferenças encontradas.

A hipótese de mistura completa, embora seja uma limitação na precisão do modelo [1], pode ser aceita para pequenos lagos e reservatórios, considerando-se

¹ Professor Adjunto da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

que os mesmos são normalmente sujeitos a mistura significativa por causa de correntes induzidas pelos ventos [4].

MODELO DE AUTODEPURAÇÃO

O trabalho foi desenvolvido a partir da admissão das seguintes hipóteses:

- a) a velocidade de desoxigenação é proporcional à quantidade de DBO remanescente;
- b) a velocidade de reoxigenação atmosférica é proporcional ao déficit de oxigênio em relação à concentração de saturação (C_s) e à área instantânea do espelho de água;
- c) a velocidade de sedimentação de DBO é proporcional à quantidade de DBO remanescente;
- d) as velocidades de acréscimo de DBO e de oxigênio, decorrentes de fontes distribuídas (respectivamente depósitos bentônicos para a DBO e fotossíntese para o oxigênio, supondo-se distribuição uniforme), são proporcionais à área instantânea do espelho de água;
- e) as vazões de entrada, de saída e de lançamento, as cargas e os coeficientes são constantes no tempo;
- f) há mistura completa, sendo as concentrações de DBO e oxigênio adotadas como uniformes no lago ou reservatório;
- g) a área superficial (espelho de água) e a área de fundo são supostas como iguais entre si.

Admitiu-se ainda que a concentração de oxigênio é maior que zero, ou seja, o déficit de oxigênio é menor do que o déficit máximo D_m (que, em valor, é igual a C_s).

Na Figura 1 está esquematizado o lago ou reservatório, onde:

- L = demanda bioquímica de oxigênio, primeiro estágio, em mg/l;
 L_o = valor de L no instante inicial;
 D = déficit de oxigênio dissolvido, em relação a C_s , em mg/l ($D = C_s - OD$);
 D_o = valor de D no instante inicial;
 V = volume, em $10^6 m^3$;

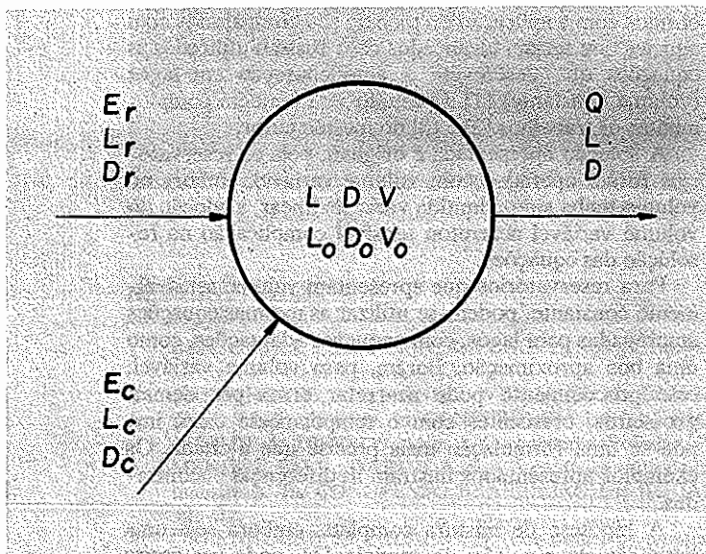


Figura 1 - Esquema do lago ou reservatório.

- V_o = valor de V no instante inicial;
 E_r = vazão do rio formador, em m^3/s ;
 L_r = concentração respectiva de DBO, em mg/l;
 D_r = concentração respectiva do déficit de oxigênio, em mg/l;
 E_c = vazão do lançamento pontual, em m^3/s ;
 L_c = concentração respectiva de DBO, em mg/l;
 D_c = concentração respectiva do déficit de oxigênio, em mg/l;
 $E = E_r + E_c$ = vazão de entrada, em m^3/s ;
 $W = E_r L_r + E_c L_c$ = carga de DBO de entrada, em t/dia;
 $Z = E_r D_r + E_c D_c$ = carga de déficit de oxigênio de entrada, em t/dia;
 Q = vazão de saída, em m^3/s ;
 K_1 = coeficiente de desoxigenação, em dia^{-1} ;
 K_3 = coeficiente de sedimentação, em dia^{-1} ;
 K_s = velocidade de entrada de oxigênio da atmosfera, em m/dia;
 S = área do espelho de água, em km^2 ;
 P_s = coeficiente de acréscimo de DBO, em área, em $mg/m^2/dia$;
 A_s = coeficiente de acréscimo de oxigênio, em área, em $mg/m^2/dia$.

A aplicação da equação da continuidade fornece:

$$(1) \frac{d(VL)}{dt} = W - QL - VL(K_1 + K_3) + P_s S,$$

com $L(o) = L_o$

$$\frac{d(VD)}{dt} = Z - QD - SDK_s - A_s S + VLK_1,$$

com $D(o) = D_o$

A seguir, estas equações serão aplicadas a três casos:

- a lagos (com $Q = E$ e portanto com volume constante igual a V_o);
- a reservatórios com volume sensivelmente constante (com Q e E , mas com volume suposto igual a V_o);
- a reservatórios (com volume variável $V = V_o + (E - Q)t$).

Lagos

Para lagos, serão adotados:

- $Q = E$
 $V = V_o$, constante
 $S = S_o$, área correspondente a V_o , constante

$$h_o = \frac{V_o}{S_o} = \text{profundidade média, em metro}$$

Nessas condições, das equações (1) obtêm-se:

$$\frac{d(V_o L)}{dt} = W - Q L - V_o L (K_1 + K_3) + P_s S_o$$

$$\frac{d(V_o D)}{dt} = Z - Q D - S_o D K_s - A_s S_o + V_o L K_1$$

Da divisão por V_0 resultam:

$$(2) \frac{dL}{dt} = -bL + (P_v + \frac{W}{V_0})$$

$$\frac{dD}{dt} = -gD + K_1L - (A_v - \frac{Z}{V_0})$$

$$\text{com: } P_v = \frac{P_s}{h_0} =$$

= coeficiente de acréscimo de DBO, em volume, em mg/l/dia

$$A_v = \frac{A_s}{h_0} =$$

= coeficiente de acréscimo de oxigênio, em volume, em mg/l/dia

$$K_2 = \frac{K_s}{h_0} = \text{coeficiente de reoxigenação, em dia}^{-1}$$

$$\beta = \frac{Q}{V_0} + K_1 + K_3, \text{ em dia}^{-1}$$

$$\gamma = \frac{Q}{V_0} + K_2, \text{ em dia}^{-1}$$

Comparando as equações (2) com as equações que descrevem a autodepuração das águas dos rios em condições aeróbias [2]:

$$(3) \frac{dL}{dt} = -(K_1 + K_3)L + P, \text{ com } L(0) = L_0$$

$$\frac{dD}{dt} = -K_2D + K_1L - A, \text{ com } D(0) = D_0$$

observa-se que (2) pode ser obtida de (3), substituindo ordenadamente em (3):

K_1 por K_1

$$K_2 \text{ por } K_2 + \frac{Q}{V_0} = \gamma$$

$$K_3 \text{ por } K_3 + \frac{Q}{V_0}$$

$$P \text{ por } P_v + \frac{W}{V_0}$$

$$A \text{ por } A_v - \frac{Z}{V_0}$$

$K_1 + K_3$ por β

K_2 por γ

Podem-se resolver as equações (2) por meio da Transformação de Laplace [5], ou utilizando a solução apresentada em [2] para rios, fazendo as substituições acima mencionadas. Em ambos os casos obtêm-se, para $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ e $\beta \neq \gamma$:

$$(4) L = L_0 e^{-\beta t} + \frac{W + P_v V_0}{\beta \cdot V_0} (1 - e^{-\beta t})$$

$$D = \left[D_0 - \frac{Z - A_v V_0}{\gamma \cdot V_0} + \frac{K_1}{b - \gamma} \left(L_0 - \frac{W + P_v V_0}{\gamma \cdot V_0} \right) \right] e^{-\gamma t} + \frac{K_1}{\gamma - \beta} \left(L_0 - \frac{W + P_v V_0}{\beta \cdot V_0} \right) e^{-\beta t} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{Z - A_v V_0}{V_0} + \frac{K_1 (W + P_v V_0)}{\beta \cdot V_0} \right)$$

Reservatórios com volume sensivelmente constante

Nesse caso, uma aproximação conveniente é utilizar as equações apresentadas para lagos, fazendo em (4):

V_0 = volume inicial, adotado constante

Q = vazão de saída, utilizada no cálculo de β e γ

W e Z são calculados utilizando as vazões de entrada E_r e E_c ($E = E_r + E_c \neq Q$):

$$W = E_r L_r + E_c L_c$$

$$Z = E_r D_r + E_c D_c$$

É óbvio que a aproximação feita será tanto melhor quanto menores forem os tempos de simulação, ou quanto mais próximos entre si forem os valores das vazões de entrada e de saída.

Reservatórios

Para reservatórios operando com volume variável, adotar-se-á:

$$Q \neq E$$

$$V = V_0 + (E - Q) t$$

$S = S(V)$ será dada pela curva área x volume do reservatório; posteriormente essa curva será aproximada por segmentos de reta $S = a_i + b_i \cdot V$, onde a_i e b_i são coeficientes relativos ao intervalo i no qual se está operando.

Fazendo nas equações (1):

$$E - Q = \delta$$

$$V = V_0 + \delta t$$

$$\delta V L = \lambda_1$$

$$\frac{K_1 + K_3}{\delta} = K_4$$

$$\frac{Q}{\delta} = K_5$$

$$\delta V D = \lambda_2$$

$$\frac{K_s}{\delta} = K_6$$

$$\frac{K_1}{\delta} = K_7$$

$$\lambda_{10} = \delta V_0 L_0$$

$$\lambda_{20} = \delta V_0 D_0$$

$$dt = \frac{dV}{\delta}$$

obtem-se:

$$\frac{d\lambda_1}{dV} + \left(\frac{K_5}{V} + K_4 \right) \lambda_1 = W + P_s S, \text{ com } \lambda_1(0) = \lambda_{10}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dV} + \left(\frac{K_5 + K_6 S}{V} \right) \lambda_2 = Z - A_s S +$$

$$+ K_7 \lambda_1, \text{ com } \lambda_2(0) = \lambda_{20}$$

Estas equações são do tipo

$$\frac{dx}{dt} + f(t)x = g(t)$$

e sua resolução para $S = a + bV$ leva a:

$$(5) \lambda_1(V) = e^{-K_4 V} V^{-K_5} [(W + P_s a) \cdot I(V_0, V, K_4, K_5) + P_s b \cdot I(V_0, V, K_4,$$

$$K_5 + 1)] + \lambda_{10} \left(\frac{V_0}{V} \right)^{K_5} e^{K_4(V_0 - V)}$$

$$\lambda_2(V) = e^{-K_6 b V} V^{-(K_5 + K_6 a)} [(Z - A_s a) \cdot I(V_0, V, K_6 b, K_5 + K_6 a) -$$

$$- A_s b \cdot I(V_0, V, K_6 b, K_5 + K_6 a + 1) + K_7 \cdot J(V_0, V, K_6 b, K_5 + K_6 a, \lambda_1(V))] +$$

$$+ \lambda_{20} \left(\frac{V_0}{V} \right)^{K_5 + K_6 a} e^{K_6 b(V_0 - V)}$$

onde:

$$\text{função } I: I(X_0, X, c, r) = \int_{X_0}^X e^{cX} X^r dX$$

$$\text{função } J: J(X_0, X, g, s, f(x)) = \int_{X_0}^X e^{gX} X^s f(x) dX$$

$X_0 > 0, X > 0, c, r, g, s$ quaisquer
 $f(X)$: função definida no intervalo X_0 a X , podendo ser dada por pontos.

As fórmulas acima foram calculadas por computador, fornecendo L e D em função do volume e, portanto, em função do tempo. A função I foi calculada por integração numérica, pelo método de Gauss com dez

pontos, que leva a resultados bastante precisos. A função J foi obtida aproximando-se $e^{gX} X^s f(X)$ por meio de uma rotina especial (Spline), a qual calcula a curva que passa por todos os pontos dados obedecendo às equações de uma régua flexível (spline), das utilizadas pelos desenhistas para aproximar funções [6]. Entre cada par de pontos adjacentes faz-se passar um polinômio cúbico, de maneira que a junção de todos os segmentos forme a curva s . A rotina Spline calcula a curva s , contínua, com derivadas primeira e segunda contínuas, de modo que a energia potencial da régua seja mínima, fornecendo a curva "mais suave" que passa pelos pontos dados. Após a aproximação, torna-se fácil obter a função J , pois ela será a integral de uma curva formada por trechos polinomiais.

A utilização das fórmulas (5) é feita aproximando-se $S = S(V)$ por meio de segmentos de reta $S = a_i + b_i V$, onde a_i e b_i são os coeficientes do intervalo i aproximado. As equações são aplicadas dentro de cada intervalo, e toda a vez que V atingir um dos extremos do intervalo em que se está operando, os coeficientes a_i e b_i são automaticamente modificados.

A simulação é feita em um determinado intervalo de tempo, por exemplo, um mês, com vazões médias mensais. Obtêm-se L (DBO) e D (déficit) em função do tempo; e, se desejado, também o valor de L e D médios no intervalo de tempo considerado. Pode-se também continuar com a simulação no mês seguinte, com novos valores de vazões, adotando os valores iniciais iguais aos finais do mês anterior. Um cuidado adicional a tomar é não permitir que o volume V saia do intervalo V_{\min} a V_{\max} ; se isso acontecer, deve-se alterar a vazão de saída, segundo uma dada regra de operação.

Exemplos

Exemplo 1: Na Figura 3 vêem-se os resultados da simulação da autodepuração em um reservatório utilizando as fórmulas (5) (solução para reservatório). As curvas de L (DBO) e D (déficit de oxigênio) são mostradas em traço cheio.

Os dados são:

V_0	=	$3 \cdot 10^6 \text{ m}^3$
E	=	$6 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} = 2,315 \text{ m}^3/\text{s}$
Q	=	$1 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} = 0,3858 \text{ m}^3/\text{s}$
W	=	2 t/dia
Z	=	$0,6 \text{ t/dia}$
K_1	=	$0,2 \text{ dia}^{-1} = 2,315 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
K_3	=	$0,2 \text{ dia}^{-1} = 2,315 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
K_s	=	$0,1 \text{ m/dia}$
P_s	=	$4 \cdot 10^3 \text{ mg}/(\text{m}^2 \cdot \text{dia})$
A_s	=	$2 \cdot 10^3 \text{ mg}/(\text{m}^2 \cdot \text{dia})$
L_0	=	1 mg/l
D_0	=	1 mg/l
V_{\min}	=	$0,9 \cdot 10^6 \text{ m}^3$
V_{\max}	=	$9 \cdot 10^6 \text{ m}^3$

$S = f(V)$: dada pela curva da Figura 2 e aproximada pelos cinco segmentos de reta vistos na mesma.

Tempo de simulação = 30 dias

Intervalo de variação do volume = $3 \cdot 10^6$ a $8 \cdot 10^6 \text{ m}^3$

Na mesma Figura 3, em curva tracejada, vê-se a simulação de L e D para esses mesmos valores, utilizando-se, porém, as equações (4) de lagos, como se o volume fosse sensivelmente constante. Conforme afirmado, o intuito é mostrar como este procedimento, usual

mente aceito para pequena variação de volume, pode acarretar erros grosseiros quando o volume varia muito. Fez-se em (4):

$$\begin{aligned}
 V &= V_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\
 S_0 &= 0,8875 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ (calculado sobre a aproximação linear)} \\
 Q &= 1 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} \\
 W &= 2 \text{ t/dia} \\
 Z &= 0,6 \text{ t/dia} \\
 K_2 &= K_s/h_0 = 0,03 \text{ dia}^{-1} \\
 P_v &= P_s/h_0 = 1,2 \text{ mg/(l.dia)} \\
 A_v &= A_s/h_0 = 0,6 \text{ mg/(l.dia)} \\
 h_0 &= V_0/S_0 = 3,38 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Como se pode observar, os resultados diferem não só do ponto de vista quantitativo como também qualitativo, pois a utilização das equações (4) de lago levariam à conclusão de que o reservatório tornar-se-ia anaeróbico em $t = 27$ dias. A utilização das equações (5), que prevêem a variação do volume, mostra que o déficit D fica bem abaixo do déficit máximo D_m , adotado igual a 8 mg/l .

Exemplo 2: Na Figura 4 vêem-se os resultados de uma simulação com o volume variando pouco, com a utilização das fórmulas (5) para reservatórios (traço cheio). Os dados são:

$$\begin{aligned}
 V_0 &= 10^6 \text{ m}^3 \\
 E &= 6 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} \\
 Q &= 1 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} \\
 W &= 2 \text{ t/dia} \\
 Z &= 0,6 \text{ t/dia} \\
 K_1 &= 0,2 \text{ dia}^{-1} \\
 K_3 &= 0,2 \text{ dia}^{-1} \\
 K_s &= 0,1 \text{ m/dia} \\
 P_s &= 4 \cdot 10^3 \text{ mg/(m}^2 \cdot \text{dia)} \\
 A_s &= 2 \cdot 10^3 \text{ mg/(m}^2 \cdot \text{dia)} \\
 L_0 &= 1 \text{ mg/l} \\
 D_0 &= 1 \text{ mg/l} \\
 V_{\min} &= 0,9 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\
 V_{\max} &= 9 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\
 S &= f(V) : \text{mesma curva e mesma aproximação do exemplo anterior.}
 \end{aligned}$$

Tempo de simulação: 2,5 dias.
Intervalo de variação do volume = $3 \cdot 10^6$ a $3,4 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.

Na mesma Figura 4, em curva tracejada, pode-se observar a simulação para estes mesmos valores, utilizando, porém, as equações (4) de lagos, pois o volume é sensivelmente constante (variou cerca de 10% no intervalo de simulação). Pela reposta obtida, concluiu-se que as fórmulas de lago forneceram uma boa aproximação para as fórmulas de reservatório. Fez-se em (4):

$$\begin{aligned}
 V &= V_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\
 S_0 &= 0,8875 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \\
 Q &= 1 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} \\
 W &= 2 \text{ t/dia} \\
 Z &= 0,6 \text{ t/dia} \\
 K_2 &= K_s/h_0 = 0,03 \text{ dia}^{-1} \\
 P_v &= P_s/h_0 = 1,2 \text{ mg/(l.dia)} \\
 A_v &= A_s/h_0 = 0,6 \text{ mg/(l.dia)} \\
 h_0 &= V_0/S_0 = 3,38 \text{ m}
 \end{aligned}$$

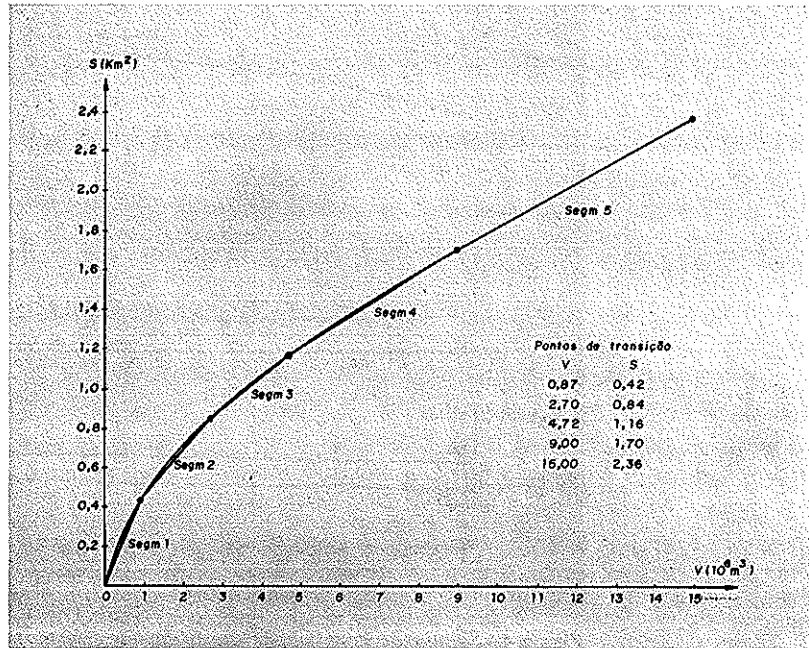


Figura 2 - Área S em função do volume V.

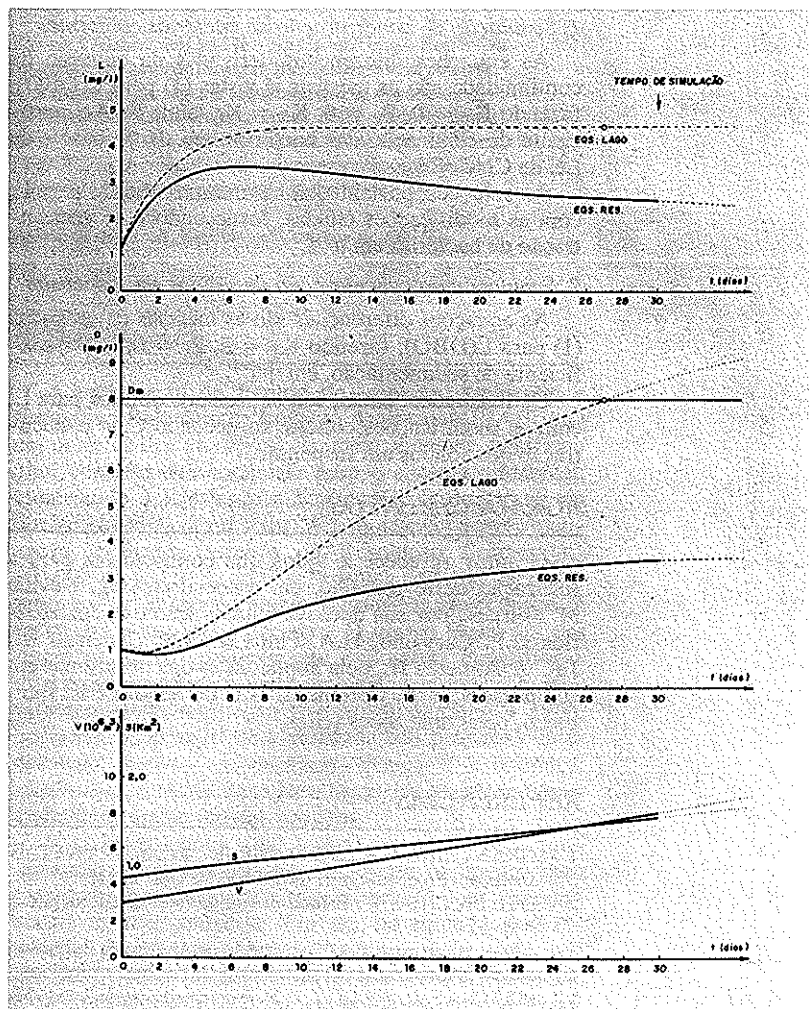


Figura 3 - Simulação com volume variável.

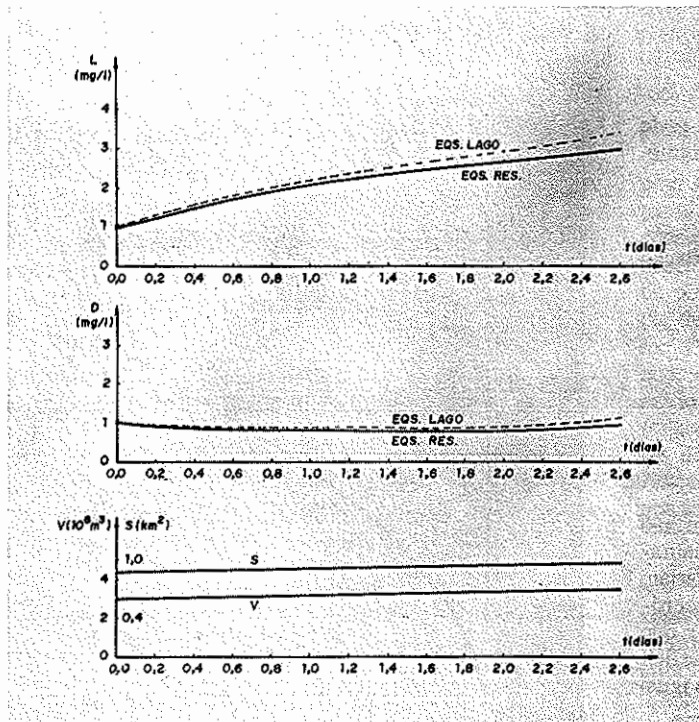


Figura 4 - Simulação com volume sensivelmente constante.

Extensões

1. Simulação da concentração de bactérias coliformes

As equações diferenciais derivadas da equação da continuidade são as mesmas já vistas (1) para L(DBO), fazendo $K_1 = 0$, $P_s = 0$, $K_3 = K_b$, onde K_b é o coeficiente de eliminação das bactérias, em dia^{-1} , base e da Lei de Chick [5].

As soluções, portanto, são as mesmas obtidas para L, com as modificações citadas, fornecendo B = concentração de bactérias em n^2/l .

2. Simulação da concentração de sólidos em suspensão

As equações diferenciais são as mesmas empregadas (1) para L(DBO), fazendo $K_1 = 0$, $P_s = 0$, $K_3 =$ coeficiente de sedimentação, em dia^{-1} .

Os resultados, então, são os mesmos obtidos para L, com as modificações citadas, fornecendo C = concentração dos sólidos em suspensão.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, em especial ao Eng. Neville M. Martins, por sua decisiva colaboração e aos estagiários D.P. Carvalho, H.A. Pinto Jr., J.B. Camargo Jr., J.R. de Almeida Jr., pela implantação dos programas em computador, e A. Cerchiaro, M.C.G. Segura e E. Beruezo, pelas aplicações feitas.

REFERÊNCIAS

- 1 - GRANTHAN, G.R., SCHAAKE JR., J.C. and PYATT, E.E. Water quality simulation model, *Journal of the Sanitary Engineering Division*. (Proceedings of the ASCE, 97 Oct. 1971).
- 2 - DEL PICCHIA, W. Estudo de um modelo de autodepuração das águas dos rios em condições aeróbicas e anaeróbicas. *Revista DAE*, (99): 52-7, 1975.
- 3 - ———. O sistema MAPS - Modelo de Análise da Poluição por Simulação. *Revista DAE*, (100): 58-60, 1975.
- 4 - ———. Aplicação da Transformada de Laplace a problemas de engenharia sanitária. *Revista DAE*, (93): 38-44, 1973.
- 5 - METCALF, L. & EDDY, H.P. *Wastewater engineering*. McGraw-Hill, 1972, 782 p.
- 6 - FORSYTHE, G.G. & MALCOM, M.A. *Computer methods for mathematical computations*, Computer Science Department, Stanford University: C 1-C 6, 1967 (Notes for Computer Science, 135).